



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.63

ОБОВЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ТОКОВОГО СЛОЯ СЫРОВАТСКОГО С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МГД-УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ<sup>14)</sup>С.И. Безродных<sup>\*,\*\*</sup>, В.И. Власов<sup>\*</sup>, Б.В. Сомов<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,  
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: [vlasov@ccas.ru](mailto:vlasov@ccas.ru);

<sup>\*\*</sup>Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ,  
Университетский пр., 13, Москва, 119992, Россия  
e-mail: [sergeyib@pochta.ru](mailto:sergeyib@pochta.ru), [somov@sai.msu.ru](mailto:somov@sai.msu.ru)

**Аннотация.** Даны решения задачи Римана-Гильберта, к которой сводятся некоторые двумерные стационарные модели магнитного пересоединения. Эти модели включают бесконечно тонкий токовый слой типа токового слоя Сыроватского и четыре присоединенные к его торцам ударные МГД-волны. Изучена глобальная структура магнитного поля в области пересоединения, а также его локальные свойства вблизи токового слоя и ударных волн. С помощью анализа плоскости годографа магнитного поля исследован тип ударных волн. В частности, установлено, что в режиме пересоединения, при котором в токовом слое присутствуют обратные токи, ударные волны являются транс-альвеновскими вблизи торцов токового слоя.

**Ключевые слова:** задача Римана-Гильберта, интеграл Кристоффеля-Шварца, магнитное пересоединение, ударные волны.

## 1. Введение

1.1. Классические модели магнитного пересоединения. Эффект магнитного пересоединения в токовых слоях лежит в основе многих нестационарных явлений в астрофизической и лабораторной плазме [1]-[3]. В работах [4], [5] в связи с проблемой солнечных вспышек показано, что в плазме высокой проводимости в окрестности гиперболической нулевой линии магнитного поля формируется тонкий токовый слой, препятствующий перераспределению взаимодействующих магнитных потоков. В условиях солнечной короны процесс пересоединения в таких слоях перед вспышкой идет очень медленно. Это позволяет накопить необходимую для вспышки энергию в виде магнитного поля токового слоя [6].

В приближении сильного магнитного поля Сыроватский [7] построил простую аналитическую модель токового слоя в виде поверхности разрыва, разделяющей поля противоположной направленности, как это показано на рис. 1а. 1б. Внутренняя структура этого разрыва подразумевает двумерный процесс магнитного пересоединения в

<sup>14</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №10-01-00837, №11-02-00843-а), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

нейтральном токовом слое ([4], [8]; см. также [9], [10]). Переход к токовому слою нулевой толщины в модели Сыроватского связан с тем, что в космической плазме высокой проводимости толщина слоя много меньше его ширины.

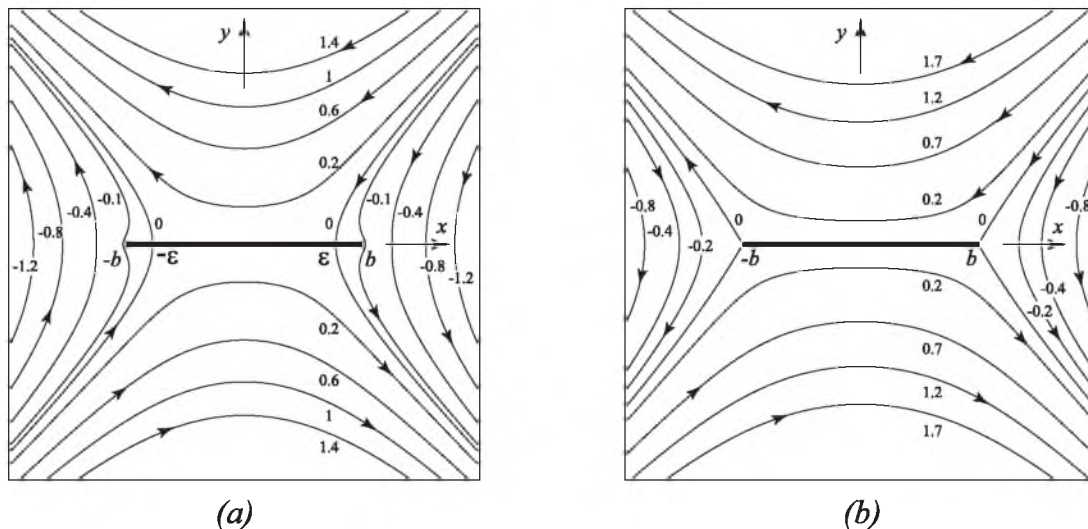


Рис. 1. Линии магнитного поля в окрестности токового слоя Сыроватского. Показаны два предельных случая: (a) полный ток в слое равен нулю; (b) отсутствуют обратные токи.

На рис. 1a, 1b токовый слой Сыроватского изображен в виде разреза длины  $2b$  на комплексной плоскости  $z = x + iy$ . Магнитное поле  $B = B_x + iB_y$  во внешности такого разреза дается формулой

$$B_x - iB_y = -ih \frac{z^2 - \varepsilon^2}{\sqrt{z^2 - b^2}}, \quad (1.1)$$

а связанный с полем соотношением  $B_x - iB_y = \frac{d\Psi}{dz}$  комплексный магнитный потенциал  $\Psi$  определяется равенством

$$\Psi(z) = -\frac{ih}{2} \left[ z \sqrt{z^2 - b^2} + (b^2 - 2\varepsilon^2) \ln(z + \sqrt{z^2 - b^2}) \right] + \text{const}; \quad (1.2)$$

здесь величина  $\varepsilon$  является расстоянием от начала координат до точки, где поле  $B$  обращается в нуль; эта точка разделяет противоположно направленные токи. На рис. 1a, 1b представлены семейства магнитных силовых линий, т.е. семейства линий уровня функции  $A = \text{Im } \Psi$ . Картина поля на рис. 1a соответствует такому значению параметра  $\varepsilon$ , при котором полный ток равен нулю, а картина поля на рис. 1b соответствует  $\varepsilon = b$ , т.е. отсутствию обратных токов.

В работах [11], [12] получена следующая система уравнений для вектора скорости движения плазмы  $v$  и ее плотности  $\rho$ :

$$\frac{dv}{dt} \times \nabla A = 0, \quad \frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + (v \cdot \nabla)A = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v = 0; \quad (1.3)$$

решение этой системы также найдено в [11], [12].

Другая классическая модель пересоединения называется течением Петчека [13] и обычно рассматривается в качестве альтернативы к токовому слою Сыроватского. В модели Петчека процесс пересоединения линий магнитного поля происходит в небольшой диффузионной области  $D$ , как показано на рис. 2, которая по своим физическим свойствам существенно отличается от пересоединяющего нейтрального токового слоя [14]. Во-первых, в центре области  $D$  плотность тока минимальна, тогда как в центре нейтрального слоя она имеет максимум. Во-вторых, с увеличением проводимости плазмы ширина области  $D$  уменьшается, а ширина нейтрального слоя растет.

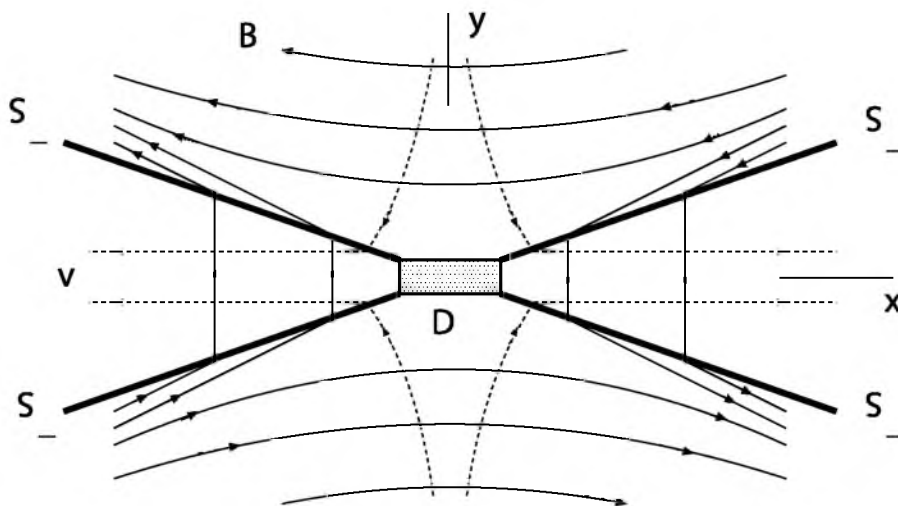


Рис. 2. Течение Петчека состоит из небольшой диффузионной области  $D$  и четырех присоединенных МГД ударных волн  $S_-$  медленного типа.

**1.2. Новые аналитические модели магнитного пересоединения.** Исходя из результатов численных экспериментов по пересоединению (в первую очередь, из расчетов [15], [16]) Б.В.Сомов и С.А.Марковский предложили двумерную модель [22], являющуюся обобщением работ Сыроватского [7] и Петчека [13]. (Об аналогичных численных экспериментах см. также [17]-[21].) Магнитное поле в такой модели считается потенциальным во внешности токовой конфигурации, которая состоит из бесконечно тонкого токового слоя, изображенного на рис. 3 в виде горизонтального разреза длины  $2b$ , и присоединенные к его концам наподобие усов под углом  $\pi\alpha$  четырех ударных волн. Им на рис. 3 соответствуют наклонные разрезы конечной длины  $r$ . В данной модели нормальная к ударной волне компонента магнитного поля предполагается равной постоянной величине  $\beta$ . Кроме того, на бесконечности предписывается условие линейного роста поля с коэффициентом пропорциональности  $h$ . Тип ударной волны в отличие от [13] не задан, а должен быть найден в результате решения задачи для магнитного поля.

Описанная выше модель [22] сводится к задаче Римана-Гильберта [23], [24] во внешности системы разрезов, изображенных на рис. 3 отрезками прямых линий. Найденная в работе [25] асимптотика решения задачи устанавливает, что при малой длине «усов» поправка к полю без «усов», т.е. к решению Сыроватского [7] без особенностей, имеет порядок  $\sqrt{r/b}$ .

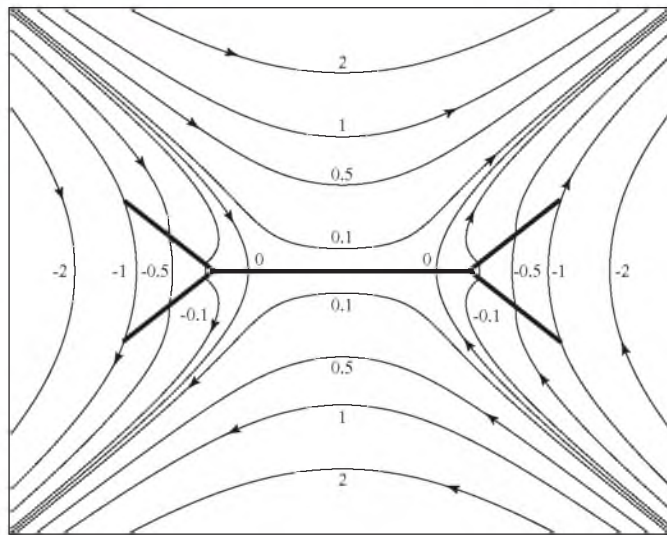


Рис. 3. Токовая структура (отрезки толстых прямых линий) и линии магнитного поля (тонкие кривые, на которых направления поля указаны стрелками) при  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta = 1$  и  $h = 1$ . Картина поля характерна для общего случая физически значимых решений задачи в режиме магнитного пересоединения, когда внутри токового слоя вблизи его торцов присутствуют обратные токи.

Полное решение задачи и его интерпретация даны в работах [26]-[29]. На рис. 3 представлена в качестве примера полученная на основе аналитического решения картина магнитного поля, соответствующая значениям параметров  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta = 1$  и  $h = 1$ . Она характерна для режима пересоединения, в котором вблизи торцов токового слоя формируются обратные токи [30].

Еще одно обобщение модели Сыроватского необходимо в связи с возможностью распада токового слоя на параллельные токовые ленты. Такой распад тонкого токового слоя может возникнуть в результате разрывной (тиринг) неустойчивости [31] или при появлении в слое области более высокого электрического сопротивления, например, аномального сопротивления ввиду возбуждения той или иной плазменной турбулентности [32]. В работе Сомова и Сыроватского [33] была предложена простая аналитическая модель распадающегося слоя, имеющего бесконечную ширину. На края разрыва в слое действует сила магнитных натяжений, пропорциональная величине разрыва и стремящаяся увеличить его. Внутри разрыва индуцируется мощное электрическое поле, способное в астрофизических условиях (например, в солнечных вспышках) ускорять заряженные частицы до высоких энергий [34].

Для изучения структуры магнитного поля во внешности распадающегося токового слоя конечной ширины в [29] предложены две модели, в которых токовый слой изображается в виде двух горизонтальных разрезов на плоскости (см. рис. 4, 5). Токовая конфигурация в первой модели не содержит ударных волн (см. рис. 4), а во второй такая конфигурация включает четыре присоединенные ударные МГД волны, изображенные на рис. 5 в виде разрезов, наклоненных под углом  $\pi\alpha$ .

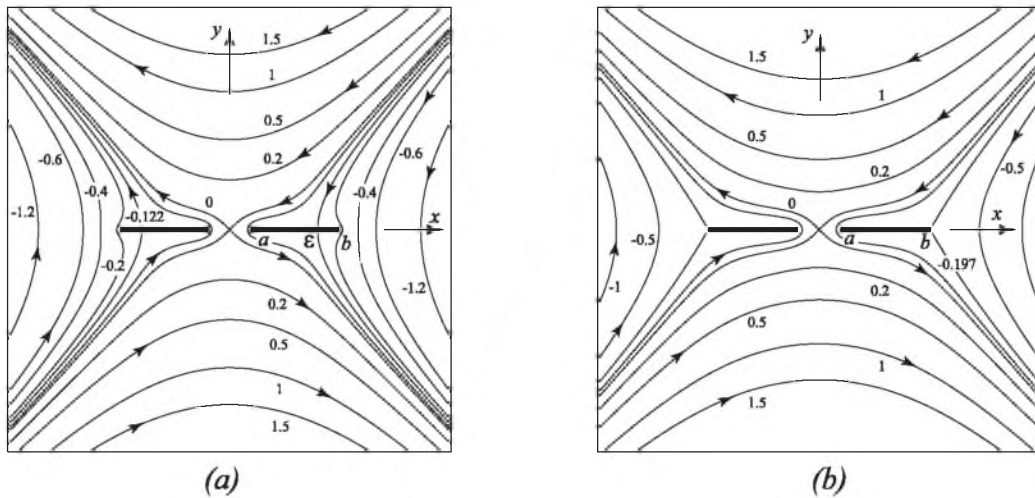


Рис. 4. Картина линий магнитного поля в окрестности токового слоя с разрывом, но без присоединенных ударных волн: (а) отсутствуют обратные токи, (б) полный ток в слое равен нулю.

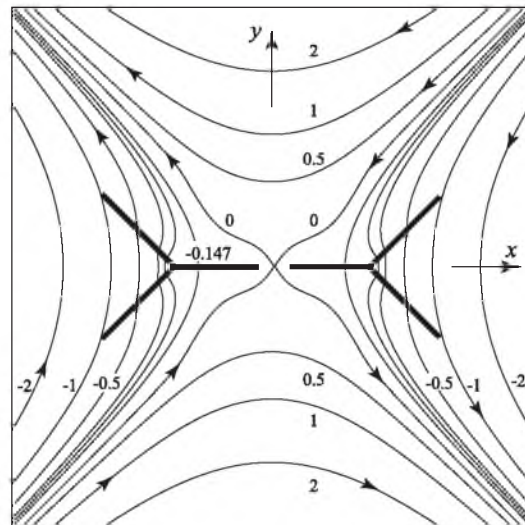


Рис. 5. Картина линий магнитного поля в окрестности распадающегося токового слоя с присоединенными ударными волнами.

На разрезах, соответствующих токовому слою, магнитное поле не имеет нормальной к нему составляющей, а на разрезах, соответствующих ударным волнам, как и в модели [22], нормальная компонента поля задана равной постоянной величине  $\beta$ . Магнитное поле имеет линейный рост на бесконечности и ограничено в конечной части плоскости за исключением концевых точек токового слоя, свободных от ударных волн, где поле может иметь степенной рост порядка  $-1/2$ . Это условие роста, накладываемое на поле, не является следствием каких-либо физических особенностей. Как и в задаче о токовом слое Сыроватского, с физической точки зрения оно обусловлено лишь тем, что толщина токового слоя формально принята равной нулю. В частном случае токового слоя





Сыроватского без обратных токов (см. рис. 1b), это ограничение вообще отсутствует, поскольку магнитное поле обращается в ноль на концах токового слоя.

Настоящая работа включает следующие результаты. В разделе 2 дан общий подход для нахождения магнитного поля в обсуждаемых моделях. В разделе 3 приведено решение задачи Римана-Гильберта для модели с непрерывным токовым слоем и присоединенными ударными волнами. Исследован характер преломления магнитного поля на ударных волнах, определяющий в соответствии с [35] тип волн. Показано, что вопреки ожиданиям, следующим из модели Петчека, присоединенные к токовому слою Сыроватского МГД разрывы представляют собой не медленные, а транс-альвеновские или промежуточные ударные волны (см., например, [36], глава 7), т.е. ударные волны, для которых нормальная составляющая скорости втекания плазмы больше альвеновской скорости перед фронтом волны, а нормальная составляющая скорости вытекания меньше альвеновской скорости за фронтом волны. Раздел 4 посвящен решению задачи Римана-Гильберта, к которой сводятся описанные модели распадающегося токового слоя с ударными волнами и без них.

## 2. Общий подход к нахождению магнитного поля

В изучаемых моделях пересоединения рассматривается плоское магнитное поле  $B = (B_x, B_y, 0)$ , потенциальное в области  $g$  – внешности токовой конфигурации  $\Gamma = \partial g$ , изображаемой в виде разреза или системы разрезов на комплексной плоскости  $z = x + iy$ . В дальнейшем магнитное поле  $B$  будем также записывать в виде

$$B(z) = B_x(x, y) + iB_y(x, y).$$

В обсуждаемых моделях (см. разд. 1) на контуре  $\Gamma$  предполагается заданной нормальная компонента  $B_n$  магнитного поля. Такая компонента поля равна нулю на токовом слое, а на разрезах комплексной плоскости, соответствующих ударным волнам, равна заданной постоянной величине  $\beta$ . Нетрудно проверить, что величина  $B_n$  выражается через  $B$  по формуле

$$B_n = \operatorname{Re}[\nu(z) \overline{B}(z)], \quad z \in \Gamma, \quad (2.1)$$

где  $\nu(z)$  – комплексная единичная нормаль, символ  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть величины в квадратных скобках, а черта над символом – комплексное сопряжение.

На бесконечности для функции  $B(z)$  ставится условие линейного роста, что отражает следующая асимптотика:

$$B(x, y) \sim ih \bar{z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где  $h$  – заданная вещественная постоянная, градиент магнитного поля. Такое поведение поля соответствует картине линий, наблюдаемой вдали от гиперболической нулевой точки.

Для нахождения магнитного поля  $B$  удобно использовать комплексно сопряженную с ним функцию

$$\mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \overline{B}(z), \quad z \in g, \quad (2.3)$$



поскольку из потенциальности поля вытекает, что  $\mathcal{F}(z) = \overline{B}(z)$  является аналитической функцией комплексного переменного  $z$  в области  $g$ .

Заменяя в равенстве (2.1) величину  $B$  на  $\overline{F}$  и учитывая сделанное замечание относительно значений нормальной к  $\Gamma$  компоненты магнитного поля, приходим к задаче Римана-Гильберта для аналитической в области  $g$  функции  $\mathcal{F}(z)$ ,

$$\operatorname{Re} [\nu(z)\mathcal{F}(z)] = c(z), \quad z \in \Gamma, \quad (2.4)$$

где  $c(z)$  – известная функция. В точках токового слоя выполняется равенство  $c(z) = 0$ , т.е. краевое условие однородно, а если модель включает ударные волны, то на участках границы  $\Gamma$ , изображающих ударные волны, выполняется равенство  $c(z) = \beta$ , где  $\beta$  – заданное постоянное значение компоненты  $B_n$  магнитного поля ( $\beta$  – параметр модели). Заметим также, что поскольку  $\Gamma$  состоит из прямолинейных звеньев, функция  $\nu(z)$  является кусочно-постоянной.

Из асимптотики (2.2) для поля  $B$  и определения (2.3) функции  $\mathcal{F}(z)$  вытекает следующее условие линейного роста функции  $\mathcal{F}(z)$  на бесконечности:

$$\mathcal{F}(z) \sim -ihz, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

В изучаемых моделях предполагается, что поле  $B$  обладает симметрией, при которой его компонента  $B_x$  четна относительно оси  $y$  и нечетна относительно оси  $x$ , а компонента  $B_y$  обладает противоположными свойствами четности. Эти условия можно записать в виде следующих соотношений:

$$B(z) = \overline{B}(-\bar{z}), \quad B(z) = -\overline{B}(\bar{z}). \quad (2.6)$$

Поэтому при отыскании магнитного поля в окрестности токового слоя без ударных волн учет условий симметрии (2.6) позволяет свести задачу (2.4) в области  $g$  к аналогичной задаче в канонической области – верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ . Таким образом, решение задачи может быть выписано известным способом [23], [24] непосредственно через интегралы типа Коши, которые в рассматриваемых случае допускают вычисление через элементарные функции.

При нахождении поля в моделях, включающих присоединенные к токовому слою ударные волны учет симметрии поля также позволяет упростить исходную задачу (2.4). Однако, при этом она сводится к аналогичной задаче Римана-Гильберта в сложной области  $G$  – четверти плоскости с разрезом (см. рис. 6а).

Поэтому для построения решения  $\mathcal{F}(z)$  применим конформное отображение  $\zeta = \Phi(z)$  области  $G$  на верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}^+$  и перейдем к аналогичной задаче в  $\mathbb{H}^+$  для функции  $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{F}[\Phi^{-1}(\zeta)]$  (см. рис. 6а и 6б). Поскольку, как было отмечено выше, коэффициенты задачи Римана-Гильберта здесь кусочно-постоянны, то используя подход [37], находим требуемую функцию  $\mathcal{P}(\zeta)$  в виде обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца. Затем найдем функцию  $\mathcal{F}$ , подставив  $\zeta = \Phi(z)$  в  $\mathcal{P}(\zeta)$ , т.е. запишем  $\mathcal{F}$  в виде суперпозиции

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}[\Phi(z)]. \quad (2.7)$$

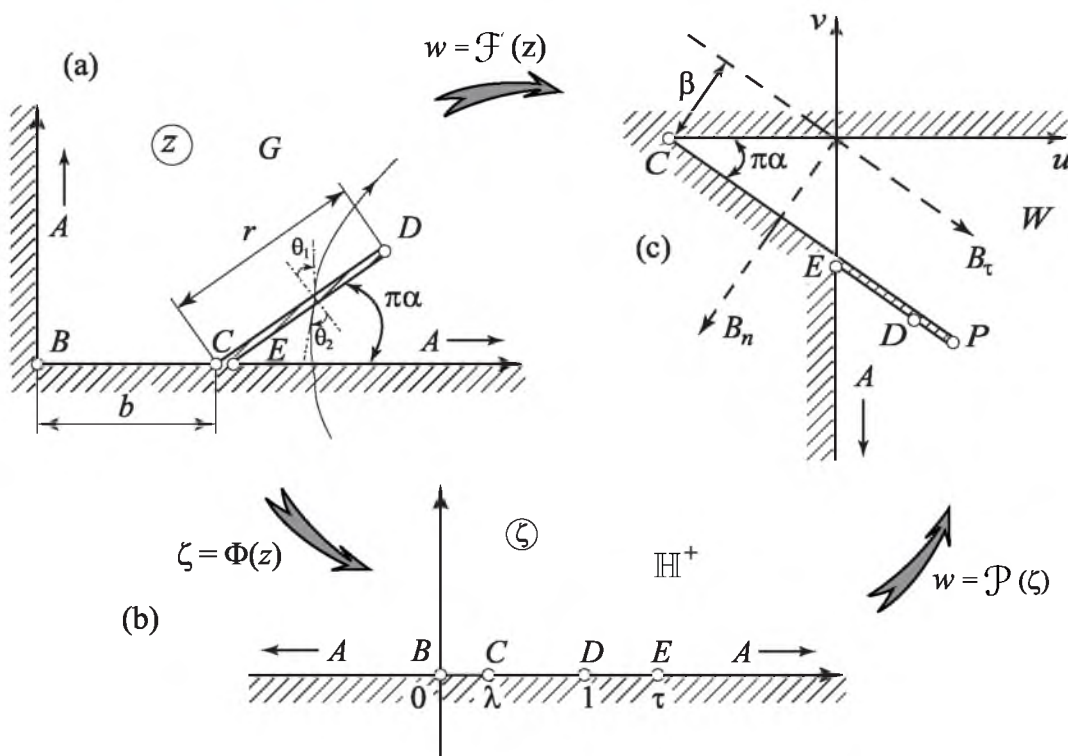


Рис. 6. Схема решения краевой задачи Римана-Гильберта:

(а) исходная область  $G$  (первый квадрант области пересоединения) в комплексной плоскости  $z$ ; (б) верхняя полуплоскость; (с) область годографа магнитного поля.

Отображение  $\Phi(z)$  построено в работе [26]. Ниже приведены некоторые необходимые сведения об этом отображении.

Поскольку область  $G$  представляет собой (бесконечный) пятиугольник, то обратное к  $\Phi(z)$  отображение  $\Phi^{-1}(\zeta)$  можно записать в виде интеграла Кристоффеля-Шварца [38], [39]:

$$\Phi^{-1}(\zeta) = \mathcal{K} \int_0^\zeta t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (t - 1) (t - \tau)^{\alpha-1} dt, \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  – деленная на  $\pi$  величина угла наклона разреза  $(CDE)$  (см. рис. 6а).

Прообразами вершин  $A$ ,  $B$  и  $D$  выбраны соответственно точки  $\zeta = \infty$ ,  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$ , а прообразы  $\lambda$  и  $\tau$  вершин  $C$  и  $E$ , как и предынтегральный множитель  $\mathcal{K}$ , подлежат нахождению. Эти неизвестные величины удовлетворяют системе нелинейных трансцендентных уравнений [39].

Аналитическое решение подобных систем в общем случае неизвестно, и сложная связь искомых параметров с геометрическими параметрами области  $G$  может быть установлена лишь численно, например, при помощи метода Ньютона. Отметим, что для специальных случаев, когда относительная длина усов  $\varepsilon = r/b$  либо мала, либо велика, связь параметров отображения с геометрическими параметрами может описана





в виде асимптотик

$$\begin{aligned}\lambda &\sim 1 - c_1 \varepsilon, \quad \tau \sim 1 + c_2 \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \\ \lambda &\sim c_3 \varepsilon^{-2/(1-2\alpha)}, \quad \tau \sim (1 - 2\alpha)^{-1} + c_4 \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

где коэффициенты  $c_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  явно выражаются через параметр  $\alpha$ .

Отметим, что параметры  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  конформного отображения фигурируют в полученных представлениях для  $\mathcal{P}$  задачи Римана-Гильберта в верхней полуплоскости.

Для искомого обратного отображения  $\Phi(z)$  глобальное представление неизвестно. В работе [26] это отображение построено в виде набора локальных (степенных) разложений с явно выписанными коэффициентами, каждое из которых получено путем обращения интеграла Кристоффеля-Шварца в окрестностях прообразов вершин области  $G$ , т.е. точек  $\zeta = 0, \lambda, 1, \tau, \infty$ . При этом области сходимости полученных разложений для отображения  $\Phi(z)$  покрывают в совокупности всю отображаемую область  $G$  и ее границу (за исключением бесконечно удаленной точки), так что для любой точки  $z$ , где требуется вычислить функцию  $\Phi(z)$ , можно указать по крайней мере одно разложение, сходящееся в данной точке экспоненциально.

Для изучения магнитного поля удобно воспользоваться векторным потенциалом  $A$ , через который оно выражается по формуле  $B = \text{rot } A$ . Поскольку рассматриваемое поле  $B$  является плоским, то у вектора  $A$  лишь третья компонента отлична от тождественного нуля, т.е.  $A = (0, 0, A)$ . Эта компонента восстанавливается через первообразную решения  $\mathcal{F} = \overline{B}$  задачи Римана-Гильберта по следующим формулам:

$$A(x, y) = \text{Im } \Psi(z), \quad \Psi(z) = \int_0^z \mathcal{F}(t) dt. \quad (2.9)$$

Функцию  $\Psi(z)$  будем называть комплексным потенциалом поля. Нетрудно убедиться, что магнитное поле  $B$  направлено по касательной к линиям уровня функции  $A$ . Поэтому будем изображать его в виде семейства линий  $A(x, y) = \text{const}$ . На рис. 1, 3-5 значения этой константы указаны рядом с соответствующими линиями магнитного поля.

Выражение полного тока  $\mathcal{J}$  через токовую конфигурацию пропорционально циркуляции магнитного поля  $B$  вдоль произвольного замкнутого контура, содержащего внутри себя эту конфигурацию. Учитывая равенство (2.3), выражающее поле через аналитическую функцию  $\mathcal{F}(z)$ , приходим к следующей формуле для полного тока:

$$\mathcal{J} = -2\pi \text{Im} [\text{res } \mathcal{F}(\infty)]; \quad (2.10)$$

здесь  $\text{res } \mathcal{F}(\infty)$  означает вычет функции  $\mathcal{F}(z)$  на бесконечности, т.е. взятый со знаком «-» коэффициент при  $z^{-1}$  в ее лорановском разложении.

### 3. Токовый слой с присоединенными ударными волнами

Нахождение магнитного поля в модели токового слоя с присоединенными ударными волнами сводится, согласно сказанному в разд. 2, к задаче Римана-Гильберта для аналитической в  $g$  функции  $\mathcal{F} = \overline{B}$ . Поскольку поле обладает симметрией относительно осей  $x$  и  $y$ , то задачу для функции  $\mathcal{F}$  достаточно рассмотреть в области  $G$  – одной



четверти исходной области, т.е. в первом квадранте с наклонным разрезом, см. рис. 6а. Искомая функция  $\mathcal{F}$  находится по формуле (2.7), где  $\Phi$  – вспомогательное конформное отображение области  $G$  на полуплоскость  $\mathbb{H}^+$ , а  $\mathcal{P}$  – решение соответствующей краевой задачи в  $\mathbb{H}^+$ . Функция  $\mathcal{P}$  имеет вид

$$\mathcal{P}(\zeta) = -i h \mathcal{K} \int_{\lambda}^{\zeta} \frac{(t - \lambda)^{\alpha-1}}{(t - \tau)^{\alpha+1/2}} (t - p) dt - \frac{\beta}{\sin \pi \alpha}, \quad (3.1)$$

где величина  $p$  дается формулой

$$p = \frac{\beta}{h} \frac{\sqrt{\tau - \lambda}}{\pi^{3/2} \mathcal{K}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 2\alpha(\tau - \lambda) + \lambda. \quad (3.2)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  – параметры конформного отображения  $\Phi^{-1}$ , определяемые геометрией области  $G$  (см. рис. 6b),  $\alpha$  – деленная на  $\pi$  величина угла наклона разреза ( $CDE$ ) (см. рис. 6а), а  $\beta$  и  $h$  – соответственно величина нормальной компоненты поля на ударной волне и коэффициент линейного роста поля на бесконечности;  $\Gamma(s)$  – гамма-функция [40].

Аналитическая функция  $w = \mathcal{F}(z)$  осуществляет конформное отображение исходной области  $G$  на некоторую область  $\mathcal{W}$ , которая, как это вытекает из представления (3.1) для  $\mathcal{P}$  в виде интеграла Кристоффеля-Шварца, является бесконечным четырехугольником (рис. 6с). Следуя [38], [39], будем называть  $\mathcal{W}$  областью годографа магнитного поля.

В работе [28] приведенное здесь решение (2.7), (3.1) было рассмотрено с точки зрения глобального устройства магнитного поля, а также поведения определяемых им полного тока и скорости пересоединения в зависимости от параметров  $\beta$  и  $h$  модели. В частности, было указано, что это решение имеет физический смысл, если параметр  $\beta$  (при фиксированном  $h = 1$ ) лежит в диапазоне  $[0, \beta_0]$ , где при  $\beta = \beta_0$  выполняется равенство  $B(0) = 0$ . В указанном диапазоне изменения  $\beta$  нет нулевых точек поля вне токовой конфигурации, поэтому постановка задачи не требует доопределения – введения дополнительных разрезов комплексной плоскости, соответствующих вторичным токовым слоям (см. [7]).

Рассмотрим характер преломления магнитного поля на ударной волне, т.е. на разрезе ( $CDE$ ), составляющем часть границы области  $G$  (см. рис. 6а). Обозначим через  $\theta_1$  и  $\theta_2$  углы отклонения вектора магнитного поля от внутренних по отношению к области  $G$  нормалей соответственно к участкам ( $CD$ ) и ( $DE$ ) ее границы. Соотношение между этими углами определяет тип ударной волны (см., например, [35]). Если углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  положительны, то при выполнении соотношения  $\theta_2 > \theta_1$  ударная волна является медленной, а в случае обратного неравенства  $\theta_1 > \theta_2$  – быстрой МГД ударной волной. Если же на некоторой части фронта ударной волны выполняется неравенство  $\theta_1 < 0$ , то такая ситуация соответствует транс-альвеновской волне. Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  могут быть вычислены через решение  $\mathcal{F}$  задачи следующим способом.

Введем на дуге ( $CDE$ ) границы области  $G$  натуральный параметр  $s$ , т.е. текущую длину дуги, которую будем отсчитывать от вершины разреза в направлении обхода

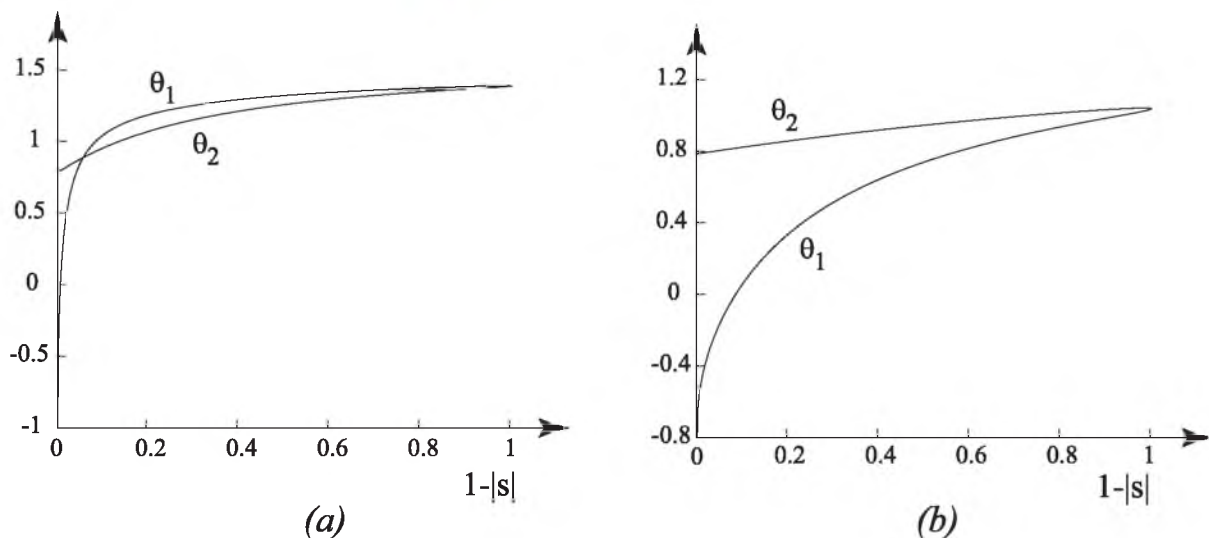


Рис. 7. Углы между магнитным полем и нормалью к плоскости ударной волны:  $\theta_1$  – со стороны набегающего потока плазмы,  $\theta_2$  – за фронтом ударной волны.

(а) Присутствует переход от быстрой волны к медленной.

(б) Перехода от быстрой волны к медленной нет.

граничного контура, при котором область остается слева:

$$z(s) = b + r(1 - s \operatorname{sign} s) e^{i\pi\alpha}, \quad s \in [-1, 1], \quad z \in (CDE);$$

при этом подразумевается, что когда  $s$  возрастает от  $(-1)$  до  $0$ , то точка  $z(s)$  пробегает берег  $(CD)$ , а когда  $s$  возрастает от  $0$  до  $1$ , то точка  $z(s)$  пробегает берег  $(DE)$  наклонного разреза на рис. 6а. Образом точки  $z(s)$  при отображении  $\mathcal{F}$  будет точка  $w = \mathcal{F}(z(s))$  прямолинейного участка границы области  $\mathcal{W}$  на рис. 6с, представляемая формулой

$$\mathcal{F}(\zeta(s)) = -\beta (\sin \pi\alpha)^{-1} + e^{-i\pi\alpha} \sigma(s), \quad s \in [-1, 1].$$

Здесь вещественная величина  $\sigma(s)$  есть расстояние на плоскости годографа от точки  $C$  до  $\mathcal{F}(\zeta(s))$ . Следовательно, функция  $\sigma(s)$  находится из выражения

$$\sigma(s) = e^{i\pi\alpha} \left\{ \mathcal{F}[z(s)] + \beta (\sin \pi\alpha)^{-1} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что зависимость  $\theta(s)$  угла между линией поля и нормалью к наклонному разрезу от параметра  $s$  выражается через  $\sigma(s)$  следующим образом:

$$\theta(s) = \operatorname{arctg} [\beta^{-1} \sigma(s) - \operatorname{ctg} \pi\alpha],$$

а величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с  $\theta$  соотношениями

$$\theta_1(s) = \theta(s), \quad s \in [-1, 0]; \quad \theta_2(s) = \theta(s), \quad s \in [0, 1].$$



Результаты вычислений углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  по указанным формулам приведены на рис. 7а, 7б.

Для того чтобы сделать некоторые качественные выводы о влиянии параметров модели на соотношение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , удобно обратиться к области годографа  $\mathcal{W}$  магнитного поля, пример которой изображен на рис. 6с. Ударной волне соответствует участок  $(CPE)$  границы области  $\mathcal{W}$ . Штриховой линией показаны оси, на которых откладываются значения нормальной  $B_n$  и касательной  $B_\tau$  по отношению к ударной волне компонент магнитного поля. Положим  $\tan \theta = B_\tau/B_n$ , где значения  $B_\tau$  и  $B_n$  вычислены в точке  $w_*$  участка  $(CPE)$  границы  $\mathcal{W}$ . Если прообраз  $z_* = \mathcal{F}^{-1}(w_*)$  точки  $w_*$  лежит на участке  $(CD)$  границы области  $G$  (рис. 6а), то  $\theta = \theta_1$ , а если на участке  $(DE)$  ее границы, то  $\theta = \theta_2$ .

Анализируя рис. 6с, нетрудно увидеть, что на всем участке  $(CPE)$  величина  $B_n$  постоянна и равна  $\beta$ . Это наглядно демонстрирует исходное предположение модели. Из рис. 6а, 6с видно, что вблизи точки  $C$  границы области годографа (а, следовательно, и вблизи точки  $C$  границы исходной области  $G$ ) существует участок границы, где  $B_\tau < 0$ . Между тем, вблизи точки  $E$  существует участок границы, где  $B_\tau > 0$ . Отсюда вытекает, что у основания ударной волны (т.е. вблизи точки присоединения ее к токовому слою), при любых параметрах модели существует отрезок  $\gamma_{\text{ТА}}$  ударной волны, где угол  $\theta_1$  отрицателен, а угол  $\theta_2$  положителен. Как уже отмечалось выше, такая ситуация соответствует транс-альвеновской МГД ударной волне.

Если для параметра  $p$  в представлении (3.1) выполняется неравенство  $0 < p < 1$ , то вблизи точки  $D$ , являющейся внешним концом ударной волны, выполняется соотношение  $\theta_1 > \theta_2$ , что соответствует медленной МГД ударной волне. Поскольку  $\theta_1$  непрерывно увеличивается от отрицательных значений до положительных, то при  $0 < p < 1$  должен существовать участок  $\gamma_{\text{fast}}$  дуги  $(CDE)$ , на котором выполняется неравенство  $\theta_2 > \theta_1$ , что соответствует быстрой ударной волне. Область годографа  $\mathcal{W}$ , изображенная на рис. 6с, соответствует описанной ситуации.

Если  $p > \tau$ , то область годографа отличается от изображенной на рис. 6с. В этом случае величина  $B_\tau$  на дуге  $(CD)$  всегда больше этой величины на дуге  $(DE)$  границы области  $\mathcal{W}$  (а, следовательно, и  $G$ ). Это означает, что соотношение  $\theta_2 > \theta_1$  выполняется на всей дуге  $(CDE)$ , т.е. участок транс-альвеновской волны сменяется участком быстрой волны, а последующий переход к медленной МГД ударной волне отсутствует.

Используя выражение (3.2) для величины  $p$ , перепишем в терминах параметров модели условие  $p < 1$ , которое является достаточным для одновременного существования участков на дуге  $(CDE)$  границы области  $G$ , соответствующих быстрой и медленной ударным волнам:

$$\frac{\beta}{h} < \pi^{3/2} \mathcal{K} \frac{1 - 2\alpha(\tau - \lambda) - \lambda}{\sqrt{\tau - \lambda} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1/2)}.$$

Аналогичным образом перепишем условие  $p > \tau$ , при котором отсутствует переход от быстрой волны к медленной:

$$\frac{\beta}{h} > \pi^{3/2} \mathcal{K} \frac{\tau - 2\alpha(\tau - \lambda) - \lambda}{\sqrt{\tau - \lambda} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1/2)}.$$

Как показывает вычислительный эксперимент, эти неравенства достаточны, но не



являются необходимыми для существования или несуществования указанной смены типа ударной волны, и при выполнении условия  $1 < p < \tau$  возможны обе указанные структуры ударной волны. На рис. 7 приведены графики углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , вычисленные соответственно при  $\beta = 0.3$ ,  $h = 1$  и при  $\beta = 1$ ,  $h = 1$ . Для таких значений параметров выполняется соотношение  $1 < p < \tau$ . Видно, что рис. 7а соответствует тому, что ударная волна делится на три зоны, соответствующие транс-альвеновской, быстрой и медленной волнам; на рис. 7б есть зоны транс-альвеновской и быстрой волны, а зона медленной волны отсутствует.

Приведем еще выражение для полного тока в рассматриваемой модели, следующее из формул (2.10), (2.7), (2.8), (3.1):

$$\mathcal{J} = -2\pi \left[ \beta \frac{\sqrt{\tau - \lambda}}{\pi \sqrt{\pi} \mathcal{K}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1/2 + \alpha) + h(\tau/2 - 1) \right],$$

где  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  – параметры конформного отображения (2.8).

#### 4. Модели распадающегося токового слоя

**4.1. Модель распадающегося токового слоя без ударных волн.** Распадающийся токовый слой изображается на комплексной плоскости  $z$  в виде двух прямолинейных разрезов равной длины, расположенных на вещественной оси симметрично относительно начала координат, см. рис. 4. Положительные числа  $a$  и  $b$ , определяющие положение концевых точек разрезов, являются параметрами задачи. Область  $g$ , где рассматривается магнитное поле, представляет собой внешность указанных разрезов, см. рис. 4.

Нахождение магнитного поля сводится, согласно сказанному в разд. 2, к задаче Римана-Гильберта для аналитической в  $\mathbb{H}^+$  функции  $\mathcal{F}(z) = \overline{B}(z)$ . Не останавливаясь на подробностях построения искомой функции  $\mathcal{F}(z)$  отметим, что она имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = -ih \frac{z(z^2 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}, \quad (4.1)$$

где число  $\varepsilon$  – свободный вещественный параметр; с физической точки зрения он определяет положение нулей магнитного поля. Будем рассматривать такую ситуацию, когда вне токового слоя поле обращается в нуль лишь в точке  $z = 0$ , что для параметра  $\varepsilon$  означает выполнение неравенства  $a \leq \varepsilon \leq b$ . Точка  $z = 0$  в центре области пересоединения имеет особый статус. Мы полагаем, что в процессе пересоединения плотность плазмы в окрестности этой точки может упасть (см. [11], глава 3, раздел 2) до столь низких значений, что пересоединение становится практически бесстолкновительным и очень быстрым. Иными словами, не хватает плазмы, чтобы сформировать вторичный токовый слой, способный подавить распад токового слоя.

Потенциал  $A(x, y)$  магнитного поля выражается через полученное решение  $\mathcal{F}$  задачи Римана-Гильберта по формулам (2.9). Подставляя выражение (4.1) для  $\mathcal{F}$  в интеграл





(2.9), находим комплексный потенциал  $\Psi(z)$  в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+$

$$\Psi(z) = -ih \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} + L \ln \left[ z^2 - \frac{(b+a)^2}{2} + \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right] \right\} + \Psi_0,$$

$$\Psi_0 = -\pi h L - ih \left[ \frac{ab}{2} - L \ln \frac{(b+a)^2}{2} \right], \quad L = (a^2 + b^2 - 2\varepsilon^2)/4. \quad (4.2)$$

Для продолжения функций  $\mathcal{F}$  и  $\Psi$  в нижнюю полуплоскость необходимо воспользоваться соотношениями (2.6).

Полный ток в рассматриваемой модели дается вытекающей из (2.10) и (4.1) формулой:

$$\mathcal{J} = \pi h (2\varepsilon^2 - a^2 - b^2). \quad (4.3)$$

Отсюда получаем, что при  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ , полный ток положителен, т.е. прямой ток превалирует над обратным, а при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  выполняется равенство  $\mathcal{J} = 0$ .

Параметрами рассматриваемой модели, от которых зависит поле  $B$  и его комплексный потенциал  $\Psi$ , являются градиент  $h$  магнитного поля на бесконечности, величина  $\varepsilon$ , определяющая положения нулей поля, а также геометрические параметры токового слоя  $a$  и  $b$ . Заметим, что при  $a \rightarrow 0$  выражение (4.1) для сопряженного поля  $\mathcal{F}$  переходит в выражение (1.1), возникающее в модели токового слоя Сыроватского. Выражения (1.2) и (4.2) для потенциалов поля в модели Сыроватского и в рассматриваемой модели совпадают при  $a = 0$  с точностью до постоянного слагаемого.

#### 4.2. Модель распадающегося токового слоя с присоединенными ударными волнами.

В данной модели магнитное поле рассматривается во внешности токовой конфигурации, см. рис. 5, изображаемой в виде системы прямолинейных разрезов, состоящей из бесконечно тонкого распадающегося токового слоя (горизонтальные разрезы от  $(-b)$  до  $(-a)$  и от  $a$  до  $b$ ), к концам которого присоединены четыре ударные МГД волны (наклонные под углом  $\pi\alpha$  разрезы длиной  $r$ ).

Согласно сказанному в разд. 2, для нахождения поля удобно ввести аналитическую функцию  $\mathcal{F}$ , комплексно сопряженную с магнитным полем, для которой возникает задача Римана-Гильберта в области  $g$ , дополненная некоторыми условиями роста. Поскольку задача обладает симметрией относительно осей  $x$  и  $y$ , то ее достаточно рассмотреть в области  $G$  – одной четверти  $g$  (см. рис. 6а). Соответствующая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re}[\mathcal{H}(z)\mathcal{F}(z)] = c(z), \quad z \in \Gamma;$$

$$\mathcal{H} = \begin{cases} e^{-i\pi/2}, & z \in (AB) \cup (MC), \\ 1, & z \in (BM) \cup (EA), \\ e^{i\pi(1/2+\alpha)}, & z \in (CDE); \end{cases} \quad c = \begin{cases} 0, & z \in (ABC) \cup (EA), \\ \beta, & z \in (CDE). \end{cases}$$

Искомая функция удовлетворяет условию линейного роста (2.5) на бесконечности, и для нее допускается корневой рост вблизи концов токового слоя, свободных от ударных волн:  $|\mathcal{F}(z)| < C|z - a|^{-1/2}$ ,  $z \rightarrow a$ , где постоянная  $C$  определяется из решения задачи.



Отметим, что геометрические параметры области  $a$ ,  $b$ ,  $r$  и  $\alpha$ , а также величины  $\beta$ ,  $h$ , характеризующие поле на ударной волне и в бесконечности, являются свободными параметрами модели.

Следуя подходу, описанному в разд. 2, для построения решения сформулированной задачи применим вначале конформное отображение  $\zeta = \Phi(z)$  области  $G$  на верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}^+$ . Обозначим через  $\mathcal{P}(\zeta)$  функцию, в которую переходит  $\mathcal{F}(z)$  после конформного отображения, т.е.  $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{F}[\Phi^{-1}(\zeta)]$ . Эта функция удовлетворяет условиям задачи Римана-Гильберта в полуплоскости, решение которой может быть получено в терминах интеграла типа Коши:

$$\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta) \left[ h\mathcal{K} + \frac{\beta}{\pi} \int_{\lambda}^{\tau} \frac{t^{-1/2}(t-a)^{1/2}(t-\lambda)^{-\alpha}(\tau-t)^{\alpha-1/2}}{t-\zeta} dt \right], \quad (4.4)$$

$$\mathcal{X}(\zeta) = i\zeta^{1/2}(\zeta-a)^{-1/2}(\zeta-\lambda)^{\alpha}(\zeta-\tau)^{1/2-\alpha}, \quad (4.5)$$

где  $\alpha$  – деленная на  $\pi$  величина угла наклона разреза ( $CDE$ ) (см. рис. 6а).

Используя подход [37], преобразуем решение (4.4), (4.5) к более удобному для его вычисления и последующего анализа магнитного поля виду обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца:

$$\mathcal{P}(\zeta) = -ih\mathcal{K} \int_0^{\zeta} t^{-1/2}(t-a)^{-3/2}(t-\lambda)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-1/2-\alpha} P_3(t) dt. \quad (4.6)$$

Здесь  $P_3(\zeta)$  – полином третьей степени с вещественными коэффициентами, первый из которых (при  $\zeta^3$ ) равен единице. Выражения для остальных коэффициентов находятся с помощью метода из работы [37] в терминах функции Апеля – обобщенной гипергеометрической функции двух комплексных переменных [40]. Эти выражения здесь не приводятся в силу их громозкости. На рис. 5 приведен пример картины поля для данной модели.

## Литература

1. Biskamp D. Magnetic Reconnection in Plasmas / Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. Hoshino M., Stenzel R.L., Shibata K. Magnetic reconnection in space and laboratory plasmas / Tokyo: Terra Scientific Publ., 2001.
3. Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение: Магнитогидродинамическая теория и приложения / Москва: Физматлит, 2005.
4. Сыроватский С.И. // Астрон. журн. – 1966. – 43. – С.340.
5. Имшенник В.С., Сыроватский С.И. // ЖЭТФ. – 1967. – 52. – С.990.
6. Somov B.V. Physical Processes in Solar Flares / Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1992.
7. Сыроватский С.И. // ЖЭТФ. – 1971. – 60. – С.1726.
8. Сыроватский С.И. // Письма в Астрон. журн. – 1976. – 2. – С.35.



9. Sweet P.A. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 1969. – 7. – P.149.
10. Parker E.N. Cosmic Magnetic Fields. Their Origin and Their Activity / Oxford: Clarendon Press, 1979.
11. Сомов Б.В., Сыроватский С.И. // Тр. Физического ин-та им. П.Н. Лебедева АН СССР. – 1974. – 74. – С.14.
12. Somov B.V. Plasma Astrophysics. Part II, Reconnection and Flares / New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006.
13. Petschek H.E. // In: AAS–NASA Symp. on the Physics of Solar Flares, NASA SP-50,1964. – P.425.
14. Сыроватский С.И. // Тр. Физического ин-та им. П.Н. Лебедева АН СССР. – 1974. – 74. – С.3.
15. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Сыроватский С.И. // Физика плазмы. – 1980. – 6. – С.297.
16. Biskamp D. // Phys. Fluids. – 1986. – 29. – P.1520.
17. Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics / Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
18. Yokoyama T., Shibata K. // Astrophys. J. – 1997. – 474. – L61.
19. Chen P.F., Fang C., Tang Y.H., et al. // Astrophys. J. – 1999. – 513. – С.516.
20. Kondoh K., Ugai M., Shimizu T. // Proc. Int. Sci. Conf. on Chromospheric and Coronal Magnetic Fields, 30 August - 2 September 2005 / ESA SP-596. Eds. D.E. Innes, A. Lagg, S.K. Solanki., 2005. – P.72.
21. Ugai M. // Phys. Plasmas. – 2009. – 15. – 082306.
22. Марковский С.А., Сомов Б.В. Некоторые свойства магнитного пересоединения в токовом слое с ударными волнами // Физика солнечной плазмы. – М.: Наука, 1989. – 46 с.
23. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968.
24. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Наука, 1977.
25. Власов В.И., Марковский С.А., Сомов Б.В. Об аналитической модели магнитного пересоединения в плазме // Дея. в ВИНТИ 6.01.1989. – 1989. – № 769-B89. – 19 с.
26. Безродных С.И., Власов В.И. // Журн. вычисл. мат. матем. физ. – 2002. – 42;3. – С.277.
27. Сомов Б.В., Безродных С.И., Власов В.И. // Известия РАН Серия физическая. – 2006. – 70;1. – С.16.
28. Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. // Письма в Астрон. журн. – 2007. – 33;2. – С.153.
29. Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. // Письма в Астрон. журн. – 2011. – 37;2. – С.133 .
30. Герлах Н.И., Сыроватский С.И. Труды Физич. ин-та им. П.Н. Лебедева АН СССР – 1974. – 74. – С.73.
31. Furth H.P., Killen J., Rosenbluth M.N. // Phys. Fluids. – 1963. – 6. – С.459.
32. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме / М.: Наука, 1975.



33. Сомов Б.В., Сыроватский С.И. // Изв. АН СССР, Сер. физ. – 1975. – 39;2. – С.375.
34. Syrovatskii S.I. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 1981. – 19. – P.163.
35. Somov B.V. Plasma Astrophysics. Part I, Fundamentals and Practice / New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006a.
36. Shercliff J.A. A Textbook of Magnetohydrodynamics / Oxford: Pergamon Press, 1965.
37. Безродных С.И., Власов В.И. // Spectral and Evolution Problems – 2006. – 16. – P.112.
38. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного / М.: Наука, 1973.
39. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений / М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
40. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / М.: Наука, 1973.

## GENERALIZED MODELS OF SYROVATSKII'S CURRENT LAYER WITH ATTACHED MHD-SHOCK WAVES

S.I.Bezrodnykh<sup>\*,\*\*</sup>, V.I.Vlasov<sup>\*</sup>, B.V.Somov<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Dorodnitsyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences,  
Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: [vlasov@ccas.ru](mailto:vlasov@ccas.ru);

<sup>\*\*</sup>Sternberg Astronomical Institute, MSU,  
Universitetskii Av., 13, Moscow, 119992, Russia  
e-mail: [sergeyib@pochta.ru](mailto:sergeyib@pochta.ru), [somov@sai.msu.ru](mailto:somov@sai.msu.ru)

**Abstract.** In present work, Riemann-Hilbert's problem connected with stationary models of  $2D$  magnetic reconnection is studied. Some solutions of this problem are found. Models under consideration include infinitely thin Syrovatskii-type current layer and also they include four MHD-shock waves of finite length which are attached to layer endpoints. Global structure of the magnetic field in the reconnection region and its local properties near the current layer and shocks are studied. On the basis of analysis of magnetic field hodograph-plane, the type of shocks is investigated. In particular, it is found that the shock waves are trans-alfvénic in the reconnection regime near current layer endpoints when reverse currents are present in the current layer.

**Key words:** Riemann-Hilbert's problem, Schwarz-Christoffel's integral, magnetic reconnection, shock waves.